

**Пробник № 1**  
**Ольга Себедаш. Школа ЕГЭ-тренинг**  
**уровень: стандартный**

профильный ЕГЭ по математике, модель 2027 года — задания 1–20  
экземпляр с решениями: слово [решение](#) рядом с номером задачи — ссылка на разбор

→ условия варианта

→ условия + ответы

→ кабинет учителя

→ все пробники

**Часть 1**

Ответом к каждому из заданий 1–13 является целое число или конечная десятичная дробь.

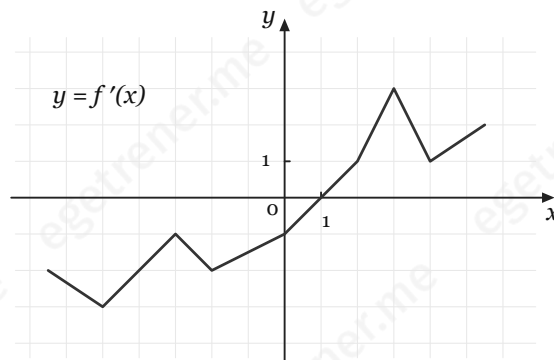
1. [решение](#) Две стороны треугольника равны 7 и 12, а угол между ними равен  $30^\circ$ . Найдите площадь треугольника.
2. [решение](#) При каком значении  $y$  векторы  $\vec{a}(2; y)$  и  $\vec{b}(8; 6)$  коллинеарны?
3. [решение](#) Объём первого шара в 27 раз больше объёма второго. Во сколько раз площадь поверхности первого шара больше площади поверхности второго?
4. [решение](#) На научную конференцию приехали 20 докладчиков: 6 из Дании, 5 из Швеции и 9 из Норвегии. Порядок выступлений определяется жеребьёвкой. Найдите вероятность того, что восьмым окажется доклад учёного из Швеции.
5. [решение](#) В магазин привезли кофе двух обжарок: 60% пачек — светлой обжарки, остальные — тёмной. Среди пачек светлой обжарки 2% имеют повреждённую упаковку, среди пачек тёмной — 3%. Найдите вероятность того, что случайно выбранная пачка окажется с повреждённой упаковкой.
6. [решение](#) В таблице задано распределение случайной величины  $X$  — выигрыша (в рублях) на один билет мгновенной лотереи.

|                  |     |      |      |      |
|------------------|-----|------|------|------|
| Выигрыш $X$ , р. | 0   | 100  | 500  | 1000 |
| Вероятность      | 0,8 | 0,15 | 0,04 | 0,01 |

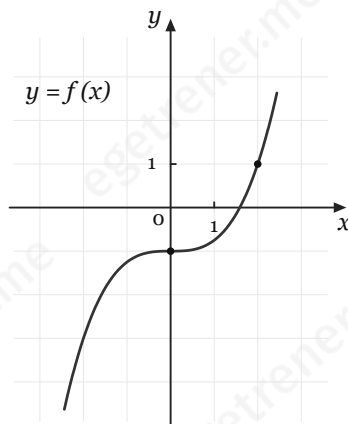
Билет стоит 60 рублей. На сколько рублей цена билета превышает математическое ожидание выигрыша?

7. [решение](#) Найдите корень уравнения  $\sqrt{6 - 5x} = 4$ .
8. [решение](#) Найдите значение выражения  $5\sqrt{2}(\cos^2 \frac{\pi}{8} - \sin^2 \frac{\pi}{8})$ .

9. [решение](#) На рисунке изображён график  $y = f'(x)$  — производной функции  $f(x)$ , определённой на интервале  $(-7; 6)$ . В какой точке отрезка  $[-3; 5]$  функция  $f(x)$  принимает наименьшее значение?



10. [решение](#) Расстояние  $d$  от предмета до тонкой собирающей линзы и расстояние  $f$  от линзы до изображения предмета (оба — в сантиметрах) связаны соотношением  $\frac{1}{d} + \frac{1}{f} = \frac{1}{F}$ , где  $F = 12$  см — фокусное расстояние линзы. Предмет находится на расстоянии  $d = 20$  см от линзы. На каком расстоянии (в сантиметрах) от линзы находится его изображение?
11. [решение](#) Первая труба пропускает на 4 литра воды в минуту меньше, чем вторая. Бак объёмом 120 литров первая труба наполняет на 1 минуту дольше, чем вторая. Сколько литров воды в минуту пропускает первая труба?
12. [решение](#) На рисунке изображён график функции  $f(x) = ax^3 + b$ . Найдите  $f(-4)$ .



13. [решение](#) В июле планируется взять кредит в банке на сумму 144 000 рублей. Условия его возврата таковы:
- каждый январь долг возрастает на 25% по сравнению с концом предыдущего года;
  - с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить часть долга одним платежом.
- Известно, что кредит будет полностью погашен двумя равными платежами. На сколько рублей общая сумма выплат превысит сумму, взятую в кредит?

## Часть 2

При выполнении заданий 14–20 запишите полное обоснованное решение.

14. [решение](#) а) Решите уравнение

$$\frac{2 \sin^2 x - \sin x}{2 \cos x - \sqrt{3}} = 0.$$

- б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку  $[-\frac{7\pi}{2}; -\frac{5\pi}{2}]$ .

15. [решение](#) В правильной четырёхугольной призме  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$  сторона основания  $AB = 6$ , боковое ребро  $AA_1 = 7$ . Точка  $M$  — середина ребра  $DD_1$ . Плоскость  $\alpha$  проходит через точки  $A$ ,  $M$  и  $C_1$ .

- а) Докажите, что сечение призмы плоскостью  $\alpha$  — ромб.

- б) Найдите площадь этого сечения.

16. [решение](#) Решите неравенство

$$\frac{x^2 - 4x - 12}{x - 1} \cdot \sqrt{4 - x} \geq 0.$$

17. [решение](#) Мастерская изготавливает и продаёт сувенирные кружки. Себестоимость изготовления одной кружки — 60 рублей. Если назначить цену  $p$  рублей ( $60 < p < 140$ ), то за день удаётся продавать  $(420 - 3p)$  кружек. По какой цене мастерской следует продавать кружки, чтобы прибыль за день была наибольшей? Найдите эту наибольшую прибыль.

18. [решение](#) В треугольнике  $ABC$  с основанием  $AC = 30$  и боковыми сторонами  $AB = BC = 25$  расположен квадрат  $KLMN$ : вершины  $K$  и  $N$  лежат на стороне  $AC$ , вершина  $L$  — на стороне  $AB$ , вершина  $M$  — на стороне  $BC$ .

- а) Докажите, что  $KL = \frac{AC \cdot BH}{AC + BH}$ , где  $BH$  — высота треугольника, проведённая к стороне  $AC$ .

- б) Найдите сторону квадрата.

19. [решение](#) Найдите все значения параметра  $a$ , при каждом из которых система

$$\begin{cases} y = x^2 + a \\ x = y^2 + a \end{cases}$$

имеет ровно два решения.

20. [решение](#) Перед каждым из чисел  $1, 2, 3, \dots, n$  ставят знак «плюс» или «минус», после чего все полученные числа складывают.

- а) Может ли результат равняться 2027, если  $n = 65$ ?

- б) Может ли результат равняться 2027, если  $n = 64$ ?

- в) При каком наименьшем  $n$  результат может равняться 2027?

## ОТВЕТЫ

|     |                                                                                                       |
|-----|-------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| 1.  | 21                                                                                                    |
| 2.  | 1,5                                                                                                   |
| 3.  | 9                                                                                                     |
| 4.  | 0,25                                                                                                  |
| 5.  | 0,024                                                                                                 |
| 6.  | 15                                                                                                    |
| 7.  | -2                                                                                                    |
| 8.  | 5                                                                                                     |
| 9.  | 1                                                                                                     |
| 10. | 30                                                                                                    |
| 11. | 20                                                                                                    |
| 12. | -17                                                                                                   |
| 13. | 56 000                                                                                                |
| 14. | а) $x = \pi k$ ; $x = \frac{5\pi}{6} + 2\pi k$ , $k \in \mathbb{Z}$ ; б) $-\frac{19\pi}{6}$ ; $-3\pi$ |
| 15. | б) $33\sqrt{2}$                                                                                       |
| 16. | $[-2; 1) \cup \{4\}$                                                                                  |
| 17. | цена 100 р.; прибыль 4 800 р. в день                                                                  |
| 18. | б) 12                                                                                                 |
| 19. | $-\frac{3}{4} \leq a < \frac{1}{4}$                                                                   |
| 20. | а) да; б) нет; в) 65                                                                                  |

## РЕШЕНИЯ

### Задание 1. [↑ назад к условию](#)

Две стороны треугольника равны 7 и 12, а угол между ними равен  $30^\circ$ . Найдите площадь треугольника.

#### Решение.

Площадь треугольника по двум сторонам и углу между ними:

$$S = \frac{1}{2} \cdot 7 \cdot 12 \cdot \sin 30^\circ = \frac{1}{2} \cdot 7 \cdot 12 \cdot \frac{1}{2} = 21$$

**Ответ:** 21.

### Задание 2. [↑ назад к условию](#)

При каком значении  $y$  векторы  $\vec{a}(2; y)$  и  $\vec{b}(8; 6)$  коллинеарны?

#### Решение.

Векторы  $(x_1; y_1)$  и  $(x_2; y_2)$  коллинеарны, когда  $x_1 y_2 - x_2 y_1 = 0$ :

$$2 \cdot 6 - 8y = 0$$

$$y = 1,5$$

**Ответ:** 1,5.

### Задание 3. [↑ назад к условию](#)

Объём первого шара в 27 раз больше объёма второго. Во сколько раз площадь поверхности первого шара больше площади поверхности второго?

#### Решение.

Отношение объёмов подобных тел равно кубу коэффициента подобия:  $k^3 = 27$ , откуда  $k = 3$ .

Отношение площадей поверхностей равно квадрату коэффициента:  $k^2 = 9$ .

**Ответ:** 9.

### Задание 4. [↑ назад к условию](#)

На научную конференцию приехали 20 докладчиков: 6 из Дании, 5 из Швеции и 9 из Норвегии. Порядок выступлений определяется жеребьёвкой. Найдите вероятность того, что восьмым окажется доклад учёного из Швеции.

#### Решение.

Каждый из 20 докладчиков может оказаться восьмым с одной и той же вероятностью, из них благоприятны 5 (учёные из Швеции):

$$P = \frac{5}{20} = 0,25$$

**Ответ:** 0,25.

### Задание 5. [↑ назад к условию](#)

В магазин привезли кофе двух обжарок: 60% пачек — светлой обжарки, остальные — тёмной. Среди пачек светлой обжарки 2% имеют повреждённую упаковку, среди пачек тёмной — 3%. Найдите вероятность того, что случайно выбранная пачка окажется с повреждённой упаковкой.

#### Решение.

По формуле полной вероятности:

$$P = 0,6 \cdot 0,02 + 0,4 \cdot 0,03 = 0,012 + 0,012 = 0,024$$

**Ответ:** 0,024.

**Задание 6.** [↑ назад к условию](#)

В таблице задано распределение случайной величины  $X$  — выигрыша (в рублях) на один билет мгновенной лотереи.

|                  |     |      |      |      |
|------------------|-----|------|------|------|
| Выигрыш $X$ , р. | 0   | 100  | 500  | 1000 |
| Вероятность      | 0,8 | 0,15 | 0,04 | 0,01 |

Билет стоит 60 рублей. На сколько рублей цена билета превышает математическое ожидание выигрыша?

**Решение.**

$$M(X) = 0 \cdot 0,8 + 100 \cdot 0,15 + 500 \cdot 0,04 + 1000 \cdot 0,01 = 15 + 20 + 10 = 45$$

Цена билета превышает математическое ожидание выигрыша на  $60 - 45 = 15$  рублей.

**Ответ:** 15.

**Задание 7.** [↑ назад к условию](#)

Найдите корень уравнения  $\sqrt{6 - 5x} = 4$ .

**Решение.**

$$\sqrt{6 - 5x} = 4$$

$$6 - 5x = 16$$

$$x = -2$$

**Ответ:** -2.

**Задание 8.** [↑ назад к условию](#)

Найдите значение выражения  $5\sqrt{2}(\cos^2 \frac{\pi}{8} - \sin^2 \frac{\pi}{8})$ .

**Решение.**

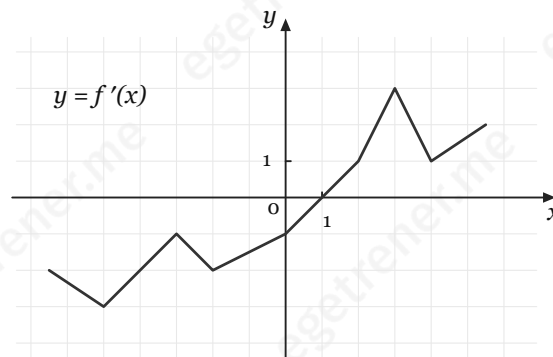
По формуле косинуса двойного угла  $\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = \cos 2\alpha$ :

$$5\sqrt{2}\left(\cos^2 \frac{\pi}{8} - \sin^2 \frac{\pi}{8}\right) = 5\sqrt{2} \cdot \cos \frac{\pi}{4} = 5\sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 5$$

**Ответ:** 5.

**Задание 9.** [↑ назад к условию](#)

На рисунке изображён график  $y = f'(x)$  — производной функции  $f(x)$ , определённой на интервале  $(-7; 6)$ . В какой точке отрезка  $[-3; 5]$  функция  $f(x)$  принимает наименьшее значение?



**Решение.**

На  $[-3; 1)$  производная отрицательна — функция  $f$  убывает; на  $(1; 5]$  производная положительна — функция возрастает.

Значит, наименьшее значение на отрезке  $[-3; 5]$  достигается в точке  $x = 1$ .

**Ответ:** 1.

**Задание 10.** [↑ назад к условию](#)

Расстояние  $d$  от предмета до тонкой собирающей линзы и расстояние  $f$  от линзы до изображения предмета (оба — в сантиметрах) связаны соотношением  $\frac{1}{d} + \frac{1}{f} = \frac{1}{F}$ , где  $F = 12$  см — фокусное расстояние линзы. Предмет находится на расстоянии  $d = 20$  см от линзы. На каком расстоянии (в сантиметрах) от линзы находится его изображение?

**Решение.**

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{F} - \frac{1}{d} = \frac{1}{12} - \frac{1}{20} = \frac{5-3}{60} = \frac{1}{30}$$

$$f = 30$$

**Ответ:** 30.

**Задание 11.** [↑ назад к условию](#)

Первая труба пропускает на 4 литра воды в минуту меньше, чем вторая. Бак объёмом 120 литров первая труба наполняет на 1 минуту дольше, чем вторая. Сколько литров воды в минуту пропускает первая труба?

**Решение.**

Пусть  $x$  л/мин пропускает первая труба, тогда вторая —  $(x + 4)$  л/мин.

$$\frac{120}{x} - \frac{120}{x+4} = 1$$

$$x^2 + 4x - 480 = 0$$

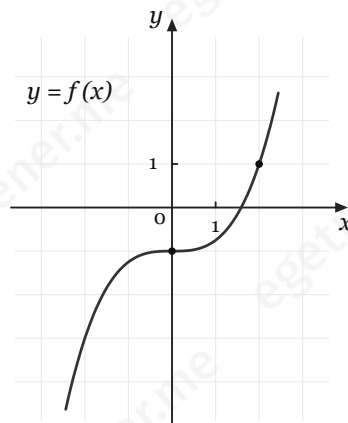
$$x = 20 \quad (x > 0)$$

Проверка:  $\frac{120}{20} = 6$  мин,  $\frac{120}{24} = 5$  мин — на 1 минуту дольше.

**Ответ:** 20.

**Задание 12.** [↑ назад к условию](#)

На рисунке изображён график функции  $f(x) = ax^3 + b$ . Найдите  $f(-4)$ .



**Решение.**

График проходит через точки  $(0; -1)$  и  $(2; 1)$ :

$$f(0) = b = -1$$

$$f(2) = 8a - 1 = 1, \quad a = \frac{1}{4}$$

$$f(-4) = \frac{1}{4} \cdot (-64) - 1 = -17$$

**Ответ:** -17.

**Задание 13.** [↑ назад к условию](#)

В июле планируется взять кредит в банке на сумму 144 000 рублей. Условия его возврата таковы:

- каждый январь долг возрастает на 25% по сравнению с концом предыдущего года;
- с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить часть долга одним платежом.

Известно, что кредит будет полностью погашен двумя равными платежами. На сколько рублей общая сумма выплат превысит сумму, взятую в кредит?

**Решение.**

Пусть  $X$  — размер платежа. Долг после первого платежа:  $144\,000 \cdot 1,25 - X = 180\,000 - X$ .

После второго платежа долг равен нулю:

$$(180\,000 - X) \cdot 1,25 - X = 0$$

$$225\,000 = 2,25X$$

$$X = 100\,000$$

Всего будет выплачено 200 000 рублей — на  $200\,000 - 144\,000 = 56\,000$  рублей больше взятого кредита.

**Ответ:** 56 000.

**Задание 14.** [↑ назад к условию](#)

а) Решите уравнение

$$\frac{2 \sin^2 x - \sin x}{2 \cos x - \sqrt{3}} = 0.$$

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку  $[-\frac{7\pi}{2}; -\frac{5\pi}{2}]$ .

**Решение.**

а)

$$\frac{2 \sin^2 x - \sin x}{2 \cos x - \sqrt{3}} = 0$$

$$\begin{cases} \sin x(2 \sin x - 1) = 0 \\ 2 \cos x - \sqrt{3} \neq 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sin x = 0 \\ \sin x = \frac{1}{2} \end{cases} \quad \text{и} \quad \cos x \neq \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\begin{cases} x = \pi k \\ x = \frac{\pi}{6} + 2\pi k \\ x = \frac{5\pi}{6} + 2\pi k \end{cases} \quad k \in \mathbb{Z}$$

Для серии  $x = \frac{\pi}{6} + 2\pi k$ :  $\cos x = \frac{\sqrt{3}}{2}$  — знаменатель обращается в нуль, серия не подходит. Для серий  $x = \pi k$  и  $x = \frac{5\pi}{6} + 2\pi k$ :  $\cos x = \pm 1$  и  $\cos x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$  — знаменатель отличен от нуля.

$$\begin{cases} x = \pi k \\ x = \frac{5\pi}{6} + 2\pi k \end{cases} \quad k \in \mathbb{Z}$$

б) отбор корней на отрезке  $[-\frac{7\pi}{2}; -\frac{5\pi}{2}]$ :

$$1) -\frac{7\pi}{2} \leq \pi k \leq -\frac{5\pi}{2}$$

$$-3,5 \leq k \leq -2,5$$

$$k = -3 \Rightarrow x = -3\pi$$

$$2) -\frac{7\pi}{2} \leq \frac{5\pi}{6} + 2\pi k \leq -\frac{5\pi}{2}$$

$$-21 \leq 5 + 12k \leq -15$$

$$-\frac{13}{6} \leq k \leq -\frac{5}{3}$$

$$k = -2 \Rightarrow x = \frac{5\pi}{6} - 4\pi = -\frac{19\pi}{6}$$

**Ответ:** а)  $x = \pi k$ ;  $x = \frac{5\pi}{6} + 2\pi k$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ ; б)  $-\frac{19\pi}{6}$ ;  $-3\pi$ .

**Задание 15.** [↑ назад к условию](#)

В правильной четырёхугольной призме  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$  сторона основания  $AB = 6$ , боковое ребро  $AA_1 = 7$ . Точка  $M$  — середина ребра  $DD_1$ . Плоскость  $\alpha$  проходит через точки  $A$ ,  $M$  и  $C_1$ .

а) Докажите, что сечение призмы плоскостью  $\alpha$  — ромб.

б) Найдите площадь этого сечения.

**Решение.**

а) 1) Грани  $BB_1 C_1 C$  и  $AA_1 D_1 D$  лежат в параллельных плоскостях, поэтому секущая плоскость  $\alpha$  пересекает их по параллельным прямым (свойство параллельных плоскостей): через  $C_1$  проходит прямая  $C_1 N \parallel AM$ , где  $N$  — точка ребра  $BB_1$ . Сечение — четырёхугольник  $ANC_1 M$ .

2) Грани  $ABB_1 A_1$  и  $DCC_1 D_1$  также параллельны, поэтому  $AN \parallel MC_1$ . Значит,  $ANC_1 M$  — параллелограмм.

3) Прямоугольные треугольники  $ADM$  и  $C_1 D_1 M$  равны по двум катетам:  $AD = C_1 D_1 = 6$ ,  $DM = D_1 M = 3,5$ . Отсюда  $AM = MC_1$ .

4) Параллелограмм с равными соседними сторонами — ромб. ■

б) 1)  $AC_1$  — диагональ призмы:

$$AC_1 = \sqrt{AB^2 + BC^2 + AA_1^2} = \sqrt{36 + 36 + 49} = \sqrt{121} = 11$$

2) Из параллелограмма  $AN = MC_1 = AM = \sqrt{36 + 12,25} = \sqrt{48,25}$ , и из прямоугольного треугольника  $ABN$ :

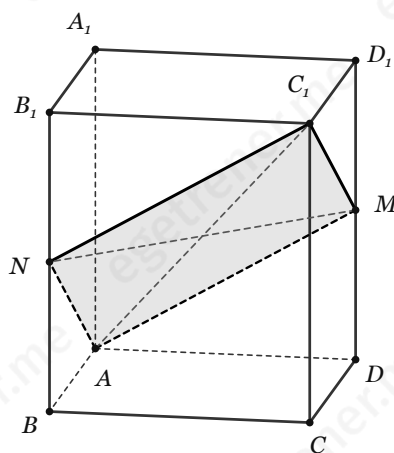
$$BN = \sqrt{AN^2 - AB^2} = \sqrt{48,25 - 36} = \sqrt{12,25} = 3,5$$

то есть  $N$  — середина ребра  $BB_1$ .

3)  $MD \perp (ABC)$ ,  $NB \perp (ABC)$  и  $MD = NB = 3,5$ , поэтому  $MDBN$  — прямоугольник и  $MN = DB = 6\sqrt{2}$  (диагональ квадрата со стороной 6).

4) Площадь ромба через диагонали:

$$S = \frac{1}{2} \cdot AC_1 \cdot MN = \frac{1}{2} \cdot 11 \cdot 6\sqrt{2} = 33\sqrt{2}$$



**Ответ:**  $33\sqrt{2}$ .

**Задание 16.** [↑ назад к условию](#)

Решите неравенство

$$\frac{x^2 - 4x - 12}{x - 1} \cdot \sqrt{4 - x} \geq 0.$$

**Решение.**

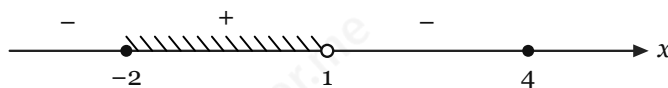
$$\frac{x^2 - 4x - 12}{x - 1} \cdot \sqrt{4 - x} \geq 0$$

$$\text{ОДЗ: } x \leq 4, \quad x \neq 1$$

При  $x = 4$  левая часть равна нулю:  $0 \geq 0$  — верно, значит  $x = 4$  — решение.

При  $x < 4$ :  $\sqrt{4 - x} > 0$ , поэтому

$$\frac{(x - 6)(x + 2)}{x - 1} \geq 0$$



$$x \in [-2; 1)$$

**Ответ:**  $[-2; 1) \cup \{4\}$ .

**Задание 17.** [↑ назад к условию](#)

Мастерская изготавливает и продаёт сувенирные кружки. Себестоимость изготовления одной кружки — 60 рублей. Если назначить цену  $p$  рублей ( $60 < p < 140$ ), то за день удаётся продавать  $(420 - 3p)$  кружек. По какой цене мастерской следует продавать кружки, чтобы прибыль за день была наибольшей? Найдите эту наибольшую прибыль.

**Решение.**

Пусть  $p$  — цена кружки,  $60 < p < 140$ . Прибыль за день:

$$P(p) = (p - 60)(420 - 3p) = 3(p - 60)(140 - p)$$

Это квадратичная функция от  $p$  с ветвями вниз и корнями  $p = 60$  и  $p = 140$ , поэтому наибольшее значение достигается в вершине параболы:

$$p = \frac{60 + 140}{2} = 100$$

$$P(100) = 3 \cdot 40 \cdot 40 = 4800$$

При цене 100 рублей прибыль мастерской наибольшая — 4 800 рублей в день (продаётся  $420 - 300 = 120$  кружек).

**Ответ:** цена 100 р.; наибольшая прибыль 4 800 р. в день.

**Задание 18.** [↑ назад к условию](#)

В треугольнике  $ABC$  с основанием  $AC = 30$  и боковыми сторонами  $AB = BC = 25$  расположен квадрат  $KLMN$ : вершины  $K$  и  $N$  лежат на стороне  $AC$ , вершина  $L$  — на стороне  $AB$ , вершина  $M$  — на стороне  $BC$ .

- а) Докажите, что  $KL = \frac{AC \cdot BH}{AC + BH}$ , где  $BH$  — высота треугольника, проведённая к стороне  $AC$ .  
 б) Найдите сторону квадрата.

**Решение.**

а) 1) Обозначим сторону квадрата  $x$ .  $KLMN$  — квадрат, поэтому  $LM \parallel KN$ , то есть  $LM \parallel AC$ , и расстояние между  $LM$  и  $AC$  равно  $x$ .

2) Проведём высоту  $BH$ ; пусть  $F$  — точка её пересечения с  $LM$ . Тогда  $BF = BH - x$  — высота треугольника  $BLM$ .

3)  $\triangle BLM \sim \triangle BAC$  (по двум углам, так как  $LM \parallel AC$ ); отношение подобия равно отношению высот:

$$\frac{LM}{AC} = \frac{BF}{BH}, \quad \frac{x}{AC} = \frac{BH - x}{BH}$$

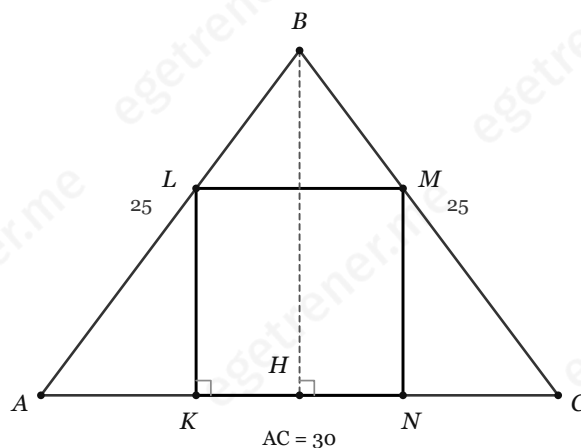
4)  $x \cdot BH = AC \cdot BH - AC \cdot x$ , откуда

$$KL = x = \frac{AC \cdot BH}{AC + BH}. \blacksquare$$

б) 1) Треугольник равнобедренный, поэтому  $H$  — середина  $AC$ :  $AH = 15$ . По теореме Пифагора  $BH = \sqrt{AB^2 - AH^2} = \sqrt{625 - 225} = 20$

2) По формуле пункта а):

$$x = \frac{30 \cdot 20}{30 + 20} = \frac{600}{50} = 12$$



**Ответ:** 12.

**Задание 19.** [↑ назад к условию](#)

Найдите все значения параметра  $a$ , при каждом из которых система

$$\begin{cases} y = x^2 + a \\ x = y^2 + a \end{cases}$$

имеет ровно два решения.

**Решение.**

Вычтем из первого уравнения системы второе:

$$y - x = x^2 - y^2$$

$$y - x = (x - y)(x + y)$$

$$(y - x)(1 + x + y) = 0$$

$$\begin{cases} y = x \\ y = -1 - x \end{cases}$$

**Случай 1:**  $y = x$ . Подстановка в первое уравнение:  $x^2 - x + a = 0$ ,  $D_1 = 1 - 4a$ : два корня при  $a < \frac{1}{4}$ , один при  $a = \frac{1}{4}$ , ни одного при  $a > \frac{1}{4}$ .

**Случай 2:**  $y = -1 - x$ . Подстановка:  $x^2 + x + a + 1 = 0$ ,  $D_2 = -3 - 4a$ : решения есть только при  $a \leq -\frac{3}{4}$ .

Решения двух случаев могут совпасть только в точке пересечения прямых  $y = x$  и  $y = -1 - x$ , то есть в точке  $(-\frac{1}{2}; -\frac{1}{2})$ ; она удовлетворяет случаю 1 при  $\frac{1}{4} + \frac{1}{2} + a = 0$ , то есть при  $a = -\frac{3}{4}$ .

Разбор значений параметра:

- при  $a < -\frac{3}{4}$ :  $2 + 2 = 4$  различных решения — не подходит;
- при  $a = -\frac{3}{4}$ : случай 1 даёт точки  $(\frac{3}{2}; \frac{3}{2})$  и  $(-\frac{1}{2}; -\frac{1}{2})$ , случай 2 — только  $(-\frac{1}{2}; -\frac{1}{2})$ , совпадающую с одной из них: ровно 2 решения — подходит;
- при  $-\frac{3}{4} < a < \frac{1}{4}$ : случай 1 даёт 2 решения, случай 2 — ни одного: ровно 2 — подходит;
- при  $a = \frac{1}{4}$  — одно решение, при  $a > \frac{1}{4}$  — ни одного.

**Ответ:**  $-\frac{3}{4} \leq a < \frac{1}{4}$ .

**Задание 20.** [↑ назад к условию](#)

Перед каждым из чисел  $1, 2, 3, \dots, n$  ставят знак «плюс» или «минус», после чего все полученные числа складывают.

- а) Может ли результат равняться 2027, если  $n = 65$ ?
- б) Может ли результат равняться 2027, если  $n = 64$ ?
- в) При каком наименьшем  $n$  результат может равняться 2027?

**Решение.**

**а)** Да. Сумма всех чисел от 1 до 65 равна

$$1 + 2 + \dots + 65 = \frac{1 + 65}{2} \cdot 65 = 2145$$

Поставим «минус» только перед числом 59:

$$2145 - 2 \cdot 59 = 2145 - 118 = 2027$$

**б)** Если перед числом  $k$  сменить знак с «плюса» на «минус», результат изменится на  $2k$  — на чётное число. Значит, при любой расстановке знаков чётность результата совпадает с чётностью суммы

$$1 + 2 + \dots + 64 = \frac{1 + 64}{2} \cdot 64 = 2080$$

Число 2080 чётно, а 2027 нечётно — результат 2027 получить нельзя.

**в)** При  $n \leq 63$  результат не превосходит  $1 + 2 + \dots + 63 = 2016 < 2027$  — нельзя.

При  $n = 64$  нельзя по пункту б).

При  $n = 65$  можно — пример в пункте а). Наименьшее  $n = 65$ .

**Ответ:** а) да; б) нет; в) 65.